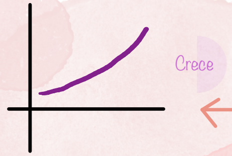
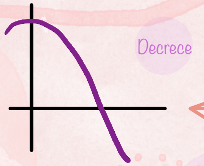
LÍMITES

Comportamiento de una función en el infinito



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Cuando los valores de x se hacen muy grandes los valores de f(x) crecen.



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Cuando los valores de x se hacen muy grandes los valores de f(x) decrecen.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Cuando los valores de x se hacen muy grandes los valores de f(x) se acercan a un valor ℓ.

Calculo de límites en el infinito

Funciones polinómicas

Para calcular el límite nos fijamos en el signo del término de grado mayor.

Ejemplo 1: $\lim_{x\to-\infty} x^4+3x-2 = +\infty$ $\quad (-\infty)^4$

Ejemplo 2: $\lim_{x\to+\infty} -x^4+3x-2 = -\infty$ $\quad -(+\infty)^4 = -(+\infty)$

Ejemplo 3: $\lim_{x\to+\infty} -x^3+2 = -\infty$ $\quad -(+\infty)^3 = -(+\infty)$

Funciones inversas de polinómicas

Si el denominador cada vez es más grande, la funcion se acerca a 0.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Límite en un punto

Para calcular el límite sustituimos el valor en la función

Ejemplo 1: $\lim_{x\to2} x^2-4x = 2^2-4\cdot2 = 4-8 = -4$

Ejemplo 2: $\lim_{x\to0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = +\infty$

Ejemplo 3: $\lim_{x\to3} \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{3^2-1}{3+2} = \frac{9-1}{5} = \frac{8}{5}$

Límites de operaciones

SUMA

$\lim f(x)+g(x) =$ (x→±∞)

- $\pm\infty \pm K = \pm\infty$ (K: constante)
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $+\infty - \infty$ IND

MULTIPLICACIÓN

$\lim f(x)\cdot g(x) =$ (x→±∞)

- $(\pm\infty)\cdot(\pm K) = \pm\infty$
- $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$
- $0\cdot(\pm\infty)$ IND

POTENCIAS

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)^{g(x)} =$

- $K^0 = 1$
- $0^{\pm\infty} = 0$
- $+\infty^{+\infty} = +\infty$
- $+\infty^{-\infty} = \frac{1}{+\infty^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- 0^0 IND
- $0^K = \begin{cases} 0 & K\geq 0 \\ \infty & K<0 \end{cases}$
- $K^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0<K<1 \\ +\infty & K>1 \end{cases}$
- ∞^0 IND
- 1^∞ IND

COCIENTE

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$	a	0	±∞
b	$\frac{a}{b}$	$\frac{0}{b}=0$	$\frac{\pm\infty}{b}=\pm\infty$
0	$\frac{a}{0}=\pm\infty$	$\frac{0}{0}$ IND	$\frac{\pm\infty}{0}=\pm\infty$
±∞	$\frac{a}{\pm\infty}=0$	$\frac{0}{\pm\infty}=0$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ IND

RAÍZ

Raíz cuadrada

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x} = \nexists$

Raíz cúbica

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$

...

Si tenemos un cociente de raíces, para compararlas nos fijamos en el monomio de grado mayor.

Límites de funciones a trozos

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x\leq c \\ f_2(x) & \text{si } x>c \end{cases}$$

Calculamos el límite en el punto de ruptura.

Límite por la izquierda → $\lim_{x\to c^-} f(x) = f_1(c)$

Límite por la derecha → $\lim_{x\to c^+} f(x) = f_2(c)$

Si $f_1(c) = f_2(c) = \ell$ ⇓ $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$

Indeterminaciones

$+\infty - \infty$

Con fracciones

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{3}\right) = +\infty-\infty$ IND

Convertimos todo en única fracción

$$\frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{3} = \frac{3x^2 - x(x-1)}{3(x-1)} = \frac{3x^2-x^2+x}{3\cdot(x-1)} = \frac{2x^2+x}{3\cdot(x-1)}$$

Calculamos el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x}{3(x-1)} = +\infty$$

Con raíces

$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2-5} = +\infty - \infty$ IND

Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\frac{(x-\sqrt{x^2-5})\cdot(x+\sqrt{x^2-5})}{(x+\sqrt{x^2-5})} = \frac{x^2-(x^2-5)}{x+\sqrt{x^2-5}}$$

Identidad notable $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

Calculamos el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-5)}{x+\sqrt{x^2-5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x+\sqrt{x^2-5}} = 0$$

Grado del denominador mayor

$\frac{0}{0}$

Con polinomios

$\lim_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$ IND

Factorizamos ambos polinomios y simplificamos

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{(x+1)}{(x-1)}$$

Siempre uno de los factores va a ser (x-punto del límite)

Calculamos el límite

$$\lim_{x\to2} \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{(2+1)}{(2-1)} = \frac{3}{1} = 3$$

Con raíces

$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0}$ IND

Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1$$

Identidad notable $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

Calculamos el límite

$$\lim_{x\to1} \sqrt{x}+1 = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2$$

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Cuando el numerador y el denominador son polinomios.

$P(x) = ax^m + \ldots \quad Q(x) = bx^n + \ldots$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} a/b & m=n \\ \pm\infty & m>n \\ 0 & m<n \end{cases}$$

$\frac{K}{0}$

$$\lim_{x\to0} \frac{-4}{x^2} = \frac{-4}{0} = \infty$$

No sabemos el signo del infinito. Para conocerlo estudiamos los límites laterales.

Límites laterales

Estudiamos límites laterales por la izquierda y por la derecha.

Límite por la izquierda: $\lim_{x\to0^-} \frac{-4}{x^2} = \frac{-4}{(-0'00\ldots1)^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

Límite por la derecha: $\lim_{x\to0^+} \frac{-4}{x^2} = \frac{-4}{(0'00\ldots1)^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

Si los límites laterales coinciden entonces el límite existe y tiene ese valor.

$$\lim_{x\to0} \frac{-4}{x^2} = -\infty$$

⚠ Si los límites laterales no coinciden entonces el límite NO existe.

Lucía Cabezas Rosa
@matesconlucia

cc BY NC ND